

离散 MIMO 衰落信道容量的研究*

肖珂, 李智涛, 刘泽民
(北京邮电大学电信工程学院, 北京 100876)

摘要: 研究了发送端未知、接收端已知信道信息条件下, 离散调制信号输入时 MIMO 衰落信道容量。提出了一种有效的信道容量估计方法, 仿真结果表明, 该估计方法降低计算的复杂度同时获得了很好的近似结果。通过该估计方法比较了接收天线不同时, PSK 输入与高斯输入时的信道容量。低信噪比时, PSK 输入可获得与高斯输入相同的传输速率, 而且在天线数一定的情况下, 应尽量增加接收端天线数来增加系统传输速率。

关键词: MIMO; 信道容量; PSK; Monte-Carlo

中图分类号: TN929.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2008) 04-0035-04

Telatar^[1] 和 Foschini^[2] 首先对 MIMO (Multiple-Input Multiple-Output) 多输入多输出无线通信系统信道容量进行了研究, 研究结果表明, 在假设各天线相互独立的条件下, MIMO 系统比 SISO (Single-Input Single-Output) 单发单收无线通信系统在信道容量上有显著的提高, 这使得这一领域备受关注。这一结论是在输入为高斯信号的条件下得到的, 在此条件下, 也有很多近似的结论, 文献 [3] 在信道增益矩阵已知的条件下, 得到了容量的极限均值和方差。文献 [4] 研究了两维星座点下的对称信道容量, 并得到了信道容量的上下界。文献 [5] 研究表明在频率选择性衰落信道中, 信道容量不仅和收发天线数有关, 而且受多径数的限制。文献 [6] 对最近的单用户和多用户 MIMO 容量做了个详尽的总结, 并提出了时变信道下中断容量、遍历容量等定义。

但在实际应用中, 由于输入信号通常为有限状态的离散调制信号, 例如相移键控调制 (PSK), 而非高斯信号。本文针对这种情况, 首先建立了输入为离散调制信号的 MIMO 系统模型, 推导了离散 MIMO 信道容量表达式, 并提出了一种基于 Monte-Carlo 积分的信道容量估计方法, 最后给出了数值仿真结果及结论。

1 系统模型

考虑 $t \times r$ 的 MIMO 系统, 即发送天线数和接收天线数分别是 t 和 r 。接收信号的离散时间等效系统模型为

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (1)$$

式中, $\mathbf{x}$ 是 $r \times 1$ 维接收信号向量, $\mathbf{H}$ 是 $r \times t$ 维信道

传输矩阵, 其元素 H_{ij} ($i \in [1, r], j \in [1, t]$) 表示从发送天线 j 到接收天线 i 的复路径增益。 $\mathbf{s}$ 是 $t \times 1$ 维发送信号向量, 其元素属于星座点集合 $S = \{s_1, \dots, s_M\}$, 其中 s_i ($1 \leq i \leq M$) 为数字调制的星座点, M 为星座点集合 S 的大小。 $\mathbf{n}$ 是 $r \times 1$ 维复高斯噪声向量, 其每个元素的实部和虚部独立同服从均值为零方差为 σ_n^2 的高斯分布, 协方差矩阵 $\mathbf{E}[\mathbf{n}\mathbf{n}^H] = \sigma_n^2 \mathbf{I}_r$, $\mathbf{I}_r$ 为 $r \times r$ 维单位阵。

为了分析方便, 假设信道为准静态平坦 Rayleigh 衰落信道, 即 $\mathbf{H}$ 中的元素为独立同分布零均值、单位方差的复高斯随机变量。接收端已准确获得信道信息, 而发送端未知信道信息。发送的总功率设为 E_s , 与发送天线数无关。 $\mathbf{s}$ 中的每个元素 s_i 服从能量约束 $E \|s_i\|^2 = E_s/t$, 目的是使发送总功率为 E_s 。

对文中出现的符号做如下说明: 粗体大写字母表示矩阵, 粗体小写字母表示向量, $E(\cdot)$ 表示数学期望, $E_A(\cdot)$ 表示事件 A 发生条件下的数学期望。 $(\cdot)^T, (\cdot)^H$ 分别表示矩阵的转置和复共轭转置。

2 MIMO 信道容量的研究

2.1 离散调制信号输入下 MIMO 信道容量

对于实际的无线衰落环境, 信道的衰落系数是一个随机变量, 只需对随机信道容量的所有可能的实现进行平均就可得到平均信道容量, 此时 MIMO 信道的平均容量为^[1-2]:

* 收稿日期: 2007-11-14

基金项目: 国家 863 计划资助项目 (2006AA01Z235); 国家自然科学基金资助项目 (90604019)

作者简介: 肖珂 (1980 年生), 男, 博士生; E-mail: zehan xiao@yahoo.com.cn

$$C_{avg} = E_H(C) = E_H(\max_{p(s)} I(s; (x, H))) \quad (2)$$

式中, $p(s)$ 是输入信号向量 s 的概率分布函数 (以下简称为 p_s), $I(s; (x, H))$ 是输入信号向量 s 和输出 (x, H) 的互信息。由互信息的性质可知:

$$I(s; (x, H)) = I(s; H) + I(s; x | H) \quad (3)$$

发送端未知信道信息时, 输入向量 s 与信道系数矩阵 H 相互独立, 则互信息 $I(s, H)$, 代入式可得

$$I(s; (x, H)) = E_H \left\{ \sum_{S_i \in S} P_{S_i} I(S_i, x | H) \right\} \quad (4)$$

式 (4) 中 $I(s_i; x | H)$ 可写成

$$I(s_i; x | H) = \int_{x \in C^r} f_{x|Hs_i} \log_2 \frac{f_{x|Hs_i}}{f_{x|H}} dx \quad (5)$$

其中, $f_{x|Hs_i}$ 和 $f_{x|H}$ 为条件概率密度函数。将式 (5) 和上述条件概率密度分别代入式 (4) 可得输入向量 s 和输出 (x, H) 的互信息为:

$$I(s; x | H) = -r \log_2(\pi e \sigma_n^2) - E_H \left\{ E_s \left[\int_{x \in C^r} f_{x|Hs_i} \log_2 \sum_{S_i \in S} P_{S_i} f_{x|Hs_i} dx \right] \right\} \quad (6)$$

式 (6) 中的互信息是输入概率分布 p_s 的函数。对于 PSK 或者方形 QAM 调制信号, 当输入概率分布为均匀分布 ($p_s = 1/M^r$) 时, 互信息达到最大值^[7-8], 即信道容量:

$$C_{avg} = t \log_2(M) - r \log_2(\pi e \sigma_n^2) - E_H \left\{ E_s \left[\int_{x \in C^r} f_{x|Hs_i} \log_2 \sum_{S_i \in S} P_{S_i} f_{x|Hs_i} dx \right] \right\} \quad (7)$$

式 (7) 为发送端未知、接收端已知信道信息时, 输入为离散调制信号时 MIMO 信道容量的表达式。

2.2 离散 MIMO 信道容量的数值计算

Monte-Carlo 积分是一种统计方法, 可以有效地对积分项进行数值计算^[9-10]。观察式 (7) 可知, C_{avg} 的计算结果由三个随机项 H , x 和 s 的均值决定, 根据 Monte-Carlo 积分的方法, 分别对三个随机项 H , x 和 s 按照各自的概率密度函数进行采样, 采样点分别为 H_m , $m = 1, 2, \dots, N_H$, x_i , $i = 1, 2, \dots, N_x$ 和 s_l , $l = 1, 2, \dots, N_s$, 其中 N_H , N_x 和 N_s 分别为 H , x 和 s 的采样数, 由采样点计算的平均值即为离散 MIMO 信道容量, 其数值计算步骤如下 (为分析方便省略式 (7) 中固定项的计算):

步骤 1. 当 s 和 H 确定时, 输出向量 x 完全由噪声向量 n 决定, 因此对输出向量 x 按噪声向量 n 的概率密度进行采样。应用 Monte-Carlo 积分的方法, 选取 $f_{x|Hs_i}$ 作为加权函数, 在每一个采样点 x_i 的完成对 $I(s_i; x | H)$ 中随机项的估计:

$$I(s_i; x | H) = \frac{1}{N_x} \sum_{l=1}^{N_x} \log_2 \sum_{S_i \in S} P_{S_i} f_{x_l|Hs_i} \quad (8)$$

步骤 2. 对输入向量 s 按输入概率分布 P_s 进行采样。对步骤 1 中得到的估计值 $I(s_i; x | H)$ 在每一个采样点 S_i 的应用 Monte-Carlo 积分的方法可得 $\hat{C}_H$

$$\hat{C}_H = \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} I(s_i; x | H) \quad (9)$$

步骤 3. 类似地, 根据步骤 2 中的计算结果, 对信道 H 进行 Monte-Carlo 积分计算, 可得式 (7) 的数值计算结果

$$\hat{C}_{avg} = \frac{1}{N_H} \sum_{m=1}^{N_H} \hat{C}_H \quad (10)$$

在步骤 1 中, $\sum_{S_i \in S} P_{S_i} f_{x_l|Hs_i}$ 在低信噪比时由于噪声的作用, 可近似为 $r \times 1$ 维复高斯随机分布^[11], 即

$$\frac{1}{\pi^r \det(V_x)} \exp \{ -x^H V_x X \} \quad (11)$$

其中, 协方差矩阵为 $V_x = HH^H + \sigma_n^2 I_r$ 。随着信噪比的增加, 这种分布渐渐趋近于离散分布。这里取式 (11) 和 $\max_{S_i \in S} \sum_{S_i \in S} P_{S_i} f_{x_l|Hs_i}$ 最大值来替换 $\sum_{S_i \in S} P_{S_i} f_{x_l|Hs_i}$ 计算。下面通过数值仿真来验证所提出的估计方法的准确性。

3 仿真结果与分析

图 1 给出了发送天线数 $t=2$, 接收天线数 $r=2$ 时, 输入分别为 BPSK、QPSK、8PSK 和 16PSK 的信道容量。图 2 给出了天线方案分别为 $t=r=1$, $t=r=2$, $t=r=4$ 和 $t=r=8$ 时的 QPSK 输入下的信道容量。其中, 虚线是由本文提出的估计方法计算所得, 采样数分别选取 $N_s=1$, $N_x=200$ 和 $N_H=500$ 。实线是精确的信道容量。通过大量的仿真实验, 我们发现对于 PSK 信号, $N_s=1$ 足够满足对输入向量采样数的要求, 这是由于 PSK 星座点对称性和信道 H 的旋转不变性所致^[1]。同样 $N_x=200$ 和 $N_H=500$ 可以满足对输入 s 和信道 H 的采样要求。从图 1 仿真结果可以看出, 本文提出的估计方法获得了很好的近似结果, 而且星座点数越多, 近似程度越好, 几种多星座点输入的仿真曲线都是重合的。这是由于对于少星座点 (BPSK) 时, 式 (11) 不能很好近似成多维高斯分布导致了偏差。另外, 在低信噪比时, 系统在 QPSK、8PSK、16PSK 输入下的信道容量差别不大, 随着信噪比的增加, 它们之间的差异变得明显, 并最终都达到了各自的极限容量。图 2 中给出的仿真结果表明, 天线数越多, 近似程度越好。文献 [12] 中对离散 MIMO 容量的近似计算

要对所有可能的 2^M 个星座点组合计算, 这也限制了该方法只适合于 M 不大的情况, 而本文提出的方法可以对使用多星座点或者多天线系统信道容量的计算, 在大大降低计算复杂度的同时可以获得了很好的近似结果。因此, 对于多天线系统, 本文提出的估计方法更具有实际意义。

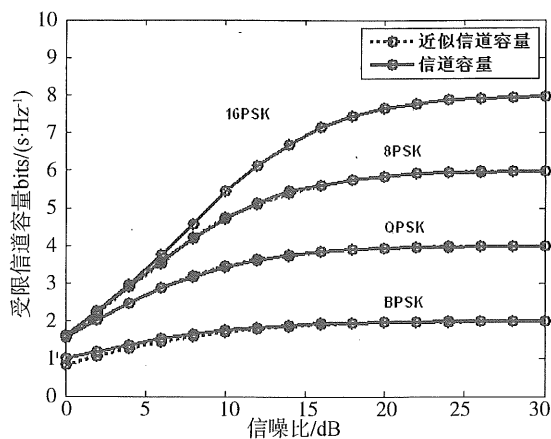


图1 PSK 输入下的离散 MIMO 信道容量

Fig. 1 The capacity for MIMO channels with PSK inputs

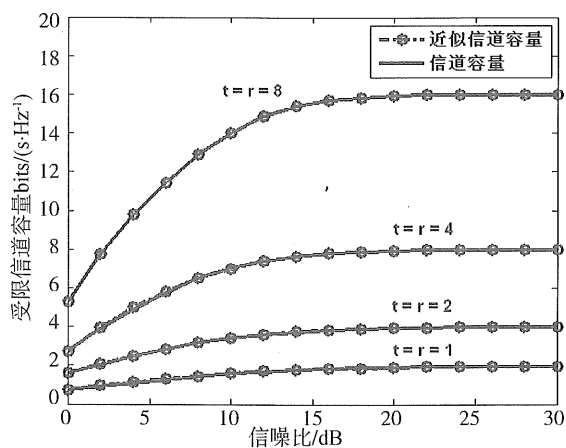


图2 不同天线方案下离散 MIMO 信道容量

Fig. 2 The discrete capacity for different MIMO channels

图3给出了发送天线数 $t=4$, 接收天线数分别为 $r=2$ 和 $r=4$ 时, QPSK 输入下的离散信道容量, 为了比较方便, 同时给出了该情况下高斯输入下的信道容量。从仿真结果可以看出, 低信噪比时, QPSK 输入同样可以获得与高斯输入时相同的传输速率, 这意味着在发送端采用高斯输入不是必须的。在高信噪比时, 离散 MIMO 信道容量由于 QPSK 信号星座点的限制, 达到了极限信道容量, 高斯输入的信道容量随着信噪比的增加而增加。图3同样暗示了低信噪比时, 天线数一定的情况下, 增加接收天线数可以提高系统传输速率, 但无法改

变最后系统达到的极限信道容量。

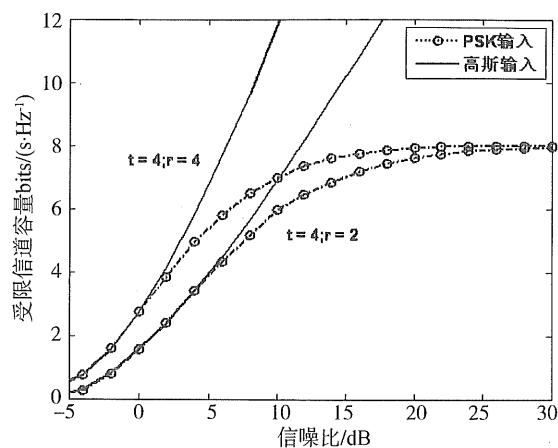


图3 天线方案分别为 4×2 和 4×4 时, QPSK 输入和高斯输入下的 MIMO 信道容量

Fig. 3 The discrete capacity for 4×2 and 4×4 MIMO channels with QPSK and Gaussian inputs

4 结 论

本文主要研究了发送端未知、接收端已知部分信道信息时, 离散 MIMO 信道容量, 推导了此时的信道容量表达式, 并提出了一种有效的信道容量估计方法, 仿真结果表明, 该估计方法近似程度好, 复杂度低, 对于多天线系统的信道容量的计算有实际意义。通过对 PSK 输入与高斯输入时的信道容量的比较可知, 低信噪比时, 两种输入下的信道容量近似一致, 并且在天线数一定的情况下, 增加接收端天线数可以改善系统的性能, 但在高信噪比时, PSK 输入下的信道容量达到了极限容量。

参考文献:

- [1] TELATAR I E. Capacity of multi-antenna gaussian channels[J]. European Transaction on Telecommunication, 1999, 10: 585-595.
- [2] FOSCHINI G J, GANS M J. On limits of wireless communications in a fading environment when using multiple antennas[J]. Wireless Personal Communication, 1998, 6: 311-335.
- [3] ETKIN R, TSE D N C. Degrees of freedom in under-spread MIMO fading channels[J]. IEEE Transaction on Information Theory, 2006, 52: 1576-1608.
- [4] BACCARELLI E. Evaluation of the reliable data rates supported by multiple-antenna coded wireless links for QAM transmission[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communication, 2001, 19(2): 295-304.
- [5] RALEIGH G G, CIOFFI J M. Spatio-temporal coding for wireless communication[J]. IEEE Transaction on Com-

- munication, 1998, 46(3): 357–366.
- [6] MULLER R R. Channel capacity and minimum probability of error in large dual antenna array systems with binary modulation[J]. IEEE Transaction on Signal Processing, 2003, 51(11): 2821–2828.
- [7] HE W, GEORGHIADES C N, Computing the Capacity of a MIMO Fading Channel Under PSK Signaling[J]. IEEE Transaction on Information Theory, 2005, 51(5): 1794–1803.
- [8] BELLORADO J, GHASSEMZADEH S, KAVCIC A. Approaching the Capacity of the MIMO Rayleigh Flat-Fading Channel with QAM Constellations, Independent across Antennas and Dimensions [J]. IEEE Transaction on Wireless Communication, 2006, 5(6): 1322–1332.
- [9] WILLIAM H T, SHANMUGAN K S, THEODORE S R, et al. Principles of Communication Systems Simulation with Wireless Applications [M]. New Jersey: Pearson Education, 2004: 242–252.
- [10] UNGERBOECK G Channel coding with multilevel/phase signals[J]. IEEE Transaction on Information Theory, 1982, 28(1): 55–67.
- [11] OYMAN O, NABAR R U, BOLCSKEI H, et al. Characterizing the statistical properties of mutual information in MIMO channels[J]. IEEE Transaction on Signal Processing, 2003, 51(11): 2784–2795.
- [12] HOCHWALD B M, BRINK S Achieving near-capacity on a multiple-antenna channel[J]. IEEE Transaction on Communications. 2003, 51(3): 389–399.

Discrete Capacity of MIMO Rayleigh Fading Channels

XIAO Ke, LI Zhi-tao, LIU Ze-min

(School of Telecommunication Engineering, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China)

Abstract: The capacity of the Multiple Input Multiple Output (MIMO) system with constellations is studied by assuming perfect channel state information (CSI) at the receiver. An expression for the discrete capacity of the Rayleigh, flat-fading, MIMO channel is derived, and an evaluation method of the discrete capacity is presented. Numerical results show that the proposed method can accurately estimate the discrete capacity with less computation, which make the evaluation of constrained capacities become possible for large MIMO channels. The method is also used to compare the QPSK and Gaussian input capacities with different antenna selections. Numerical results show that Gaussian input and PSK input can achieve about the same data rate at low signal-to-noise ratio (SNR).

Key words: Multiple-Input Multiple-Output; channel capacity; Phase-Shift Keying; Monte-Carlo